



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ALGORITMY HLEDÁNÍ SHLUKŮ ŘEŠENÍ DIOFANTICKÉ
ROVNICE POPISUJÍCÍ REZONANCI ROSSBYHO VLN**

ALGORITHMS OF SEARCHING FOR CLUSTERS OF SOLUTIONS OF DIOPHANTIC EQUATION
DESCRIBING A RESONANCE OF ROSSBY WAVES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Samuel Leško

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: Samuel Leško
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Algoritmy hledání shluků řešení diofantické rovnice popisující resonanci Rossbyho vln

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úkolem je vytvořit nové algoritmy umožňující najít a znázornit shluky celočíselných řešení diofantické rovnice, která popisuje resonance Rossbyho vln. Student připraví originální programový balík v prostředí Wolfram Mathematica. Bude rovněž obeznámen s širším pozadím a významem problému.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Popis problematiky (meteorologické vlny, fyzika plazmatu, PDR), vymezení problému.
- 2) Originální programový balík v prostředí Wolfram Mathematica.
- 3) Experimentální výpočty a závěry z nich.

Seznam doporučené literatury:

BUSTAMANTE, M. D., and U. HAYAT. "Complete classification of discrete resonant Rossby/drift wave triads on periodic domains." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.9 (2013): 2402-2419.

KISHIMOTO, N. and T. YONEDA. "A number theoretical observation of a resonant interaction of Rossby waves." *Kodai Mathematical Journal* 40.1 (2017): 16-20.

KOPP, G. S. "The arithmetic geometry of resonant Rossby wave triads." *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 1.1 (2017): 352-373.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 13. 2. 2018



prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá zkoumáním meteorologického fenoménu atmosférických vln z hlediska teorie čísel a algebry. Z fyzikálního popisu dynamiky systému těchto vln vyplývá diofantická rovnice, jejíž řešení tvoří ve dvourozměrné souřadnicové soustavě neorientovaný graf složený ze šestiúhelníků. Za účelem hledání těchto řešení byl implementován funkční program v prostředí Wolfram Mathematica.

Summary

This thesis concerns about investigating a meteorological phenomenon of atmospheric waves from a number-theoretical and algebraic view. From the physical description of the dynamics of the system we get a Diophantine equation, solutions of which create an undirected graph consisting of hexagons in the 2D plane. For the purpose of finding these solutions a program in Wolfram Mathematica was implemented.

Klíčová slova

Rossbyho vlna, Charneyho-Hasegawova-Mimova rovnice, diofantická rovnice, rezonanční triáda, neorientovaný graf, Wolfram Mathematica.

Keywords

Rossby wave, Charney-Hasegawa-Mima equation, Diophantine equation, resonant triad, undirected graph, Wolfram Mathematica.

LEŠKO, S. *Algoritmy hledání shluků řešení diofantické rovnice popisující resonanci Rossbyho vln*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 31 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

A handwritten signature in blue ink, consisting of several fluid, overlapping strokes that form a stylized 'S' and 'L' shape.

Samuel Leško

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli doc. RNDr. Miroslavu Kurešovi, Ph.D. za jeho svědomité vedení při psaní této bakalářské práce.

Samuel Leško

Obsah

Úvod	12
1 Fyzikální pozadí problému	13
1.1 Rossbyho vlny	14
1.2 Resonanční triády	15
1.3 Aplikace v dalších odvětvích	16
2 Algebraický náhled	18
2.1 Množina všech řešení	18
2.2 Shluky řešení	20
3 Algoritmus hledání shluků řešení	23
3.1 Hledání sousedů	23
3.2 Nalezení shluku řešení	25
4 Implementace ve Wolfram Mathematica	26
4.1 Programový balík Rossby.m	26
4.2 Pracovní sešit Rossby.nb	27
Závěr	28
Literatura	29
Seznam použitých zkratk a symbolů	30
Seznam příloh	31

Úvod

Tato bakalářská práce si dává za cíl aplikovat matematický pohled na jistý meteorologický fenomén související s prouděním vysokopoloženého vzduchu v zemské atmosféře.

Atmosférické tryskové proudění je koridor vzduchu proudící v několikakilometrové výšce nad povrchem Země, které vzniká na rozhraní teplejšího a chladnějšího vzduchu. Toto proudění má rozhodující vliv na stav počasí nad danou oblastí Země po několik dnů až týdnů. Jsou to ty vlny, které vidíme u předpovědi počasí jako pásy proudícího vzduchu, které s sebou přinášejí takzvanou chladnou nebo teplou „frontu“. Tryskové proudění se vlivem zemské rotace vlní a meandry, které vznikají nazýváme Rossbyho vlnami. V této práci se budeme zejména zabývat Rossbyho vlnami, které spolu resonují. Při resonanci totiž může vzniknout stojatá vlna, která nad dané území přinese stabilní oblast vyokého nebo nízkého tlaku a s ním spojené projevy počasí — extrémní horka a zimy nebo naopak vytrvající srážky.

V této bakalářské práci se na resonanci Rossbyho vln podíváme z pohledu matematické algebry a teorie čísel. Z dynamického popisu jevu totiž vyplyne jistá rovnice s celočíselnými řešeními (takzvaná diofantická rovnice) a tato rovnice se stane centrálním bodem našeho zájmu. Budeme hledat řešení této rovnice a jak se ukáže, tato řešení se „shlukují“ do zajímavé struktury.

V úvodní části textu více přiblížíme fyzikální kontext problému, kterému se v této práci věnujeme. Ukážeme, že tento kontext nakonec není jenom meteorologický, ale že se z matematického hlediska podobné problémy vyskytují i v několika dalších různých vědeckých odvětvích. Pak na problém resonance Rossbyho vln aplikujeme algebraický přístup a uvedeme si několik užitečných pozorování. V závěru blíže popíšeme praktickou část práce — program s implementací hledání shluků řešení, který je nedílnou součástí této práce. Tento program byl vytvořen v prostředí Wolfram Mathematica.

1. Fyzikální pozadí problému

V první části práce si řekneme něco o fyzikálním pozadí, z něhož tato práce vychází. Fenomén, který je základem našeho zkoumání jsou již zmiňované Rossbyho vlny, tedy vlny proudícího vzduchu, které vznikají ve vysokých polohách atmosféry planety vlivem její rotace. Tyto vlny oddělují oblasti teplejšího vzduchu od oblastí s chladnějším vzduchem. Na Zemi hrají tyto vlny velice významnou roli v globálním klimatickém měřítku. Jako první je popsal švédský meteorolog Carl-Gustaf Rossby v třicátých letech 19. století, téhož času působící na Chicagské univerzitě. Jeho práci dále rozvíjel zejména jeho doktorský student a významný meteorolog 20. století Jule Gregory Charney, který v roce 1947 vytvořil fyzikální aparát, který dynamiku tryskového proudění a Rossbyho vln popisuje velice přesně.



Carl-Gustaf Arvid Rossby (28. prosinec 1898, Stockholm — 19. srpen 1957, Stockholm). ¹



Jule Gregory Charney (1. leden 1917, San Francisco — 16. červen 1981, Boston). ²

I když byl jev Rossbyho vln dobře popsán už před několika desetiletími, jejich zkoumání nabralo v posledních letech na intenzitě, a to zejména zkoumání jejich resonance. Jak už bylo zmíněno, při resonanci Rossbyho vln může docházet k extrémním projevům počasí na relativně velkém území a má se za to, že k resonancím dochází pořád častěji vlivem globálních klimatických změn způsobených člověkem. Tím se problém resonance Rossbyho vln stává velice aktuálním a je předmětem zájmu nejen meteorologů, ale právě i například matematiků.

¹Zdroj obrázku: *University of Chicago Photographic Archive, [apf1-07329], Special Collections Research Center, University of Chicago Library.*

²Zdroj obrázku: *commons.wikimedia.org.*

1.1. Rossbyho vlny

Obecně platí, že jevy v atmosféře jsou velice složité na opis, protože je jejich chování ovlivněno mnoha veličinami. Je proto nutné při meteorologickém zkoumání aproximovat realitu matematickými modely. Než uvedeme relevantní modely, uvedme si nejprve jednu důležitou veličinu.

Definice 1.1 (Coriolisův parametr). To, jak velký vliv má rotace Země na pohyb částice v její atmosféře určuje *Coriolisův parametr* f , který je určen vztahem

$$f = 2\Omega \sin \varphi, \quad (1.1)$$

kde Ω je uhlová rychlost rotace Země ($\Omega = 7.2921 \times 10^{-5}$ rad/s) a φ je zeměpisná šířka.

Nejjednodušším modelem, který lze při popisu meteorologických jevů použít, je takzvaný model f -roviny. Tento model předpokládá, že parametr f je napříč celou zkoumanou oblastí konstantní. Geometricky si lze f -rovinu představit jako tečnou rovinu, která se Země dotýká v zeměpisné šířce příslušící danému f . Používá se pouze při modelování počasí na malém území, protože při zkoumání meteorologických jevů většího měřítka už změny v Coriolisovém parametru zanedbat nemůžeme. Jak posléze uvidíme, tento model je pro naše účely nepoužitelný, protože Rossbyho vlny v něm neexistují. Ty totiž pro svůj vznik potřebují variaci parametru f .

Proto se zaměříme na model zvaný β -rovina, ve kterém se Coriolisův parametr f mění lineárně. Tento model byl v roce 1940 zaveden samotným Rossbym.

V modelu β -roviny platí následující rovnice, která popisuje zachování potenciální vlivosti dvourozměrného proudění.

Definice 1.2 (Charneyho-Hasegawova-Mimova rovnice (CHMR)). Rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + [\psi, \Delta\psi] = 0 \quad (1.2)$$

je parciální diferenciální rovnice (PDR) pro proudovou funkci $\psi = \psi(x, y, t)$, která se nazývá *Charneyho-Hasegawova-Mimova rovnice*. $\beta > 0$ je konstantní parametr z aproximace β -roviny.

V rovnici (1.2) se vyskytují dva operátory, Laplaceův operátor a Jacobián, jejichž význam je následující:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
$$[f, g] := \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

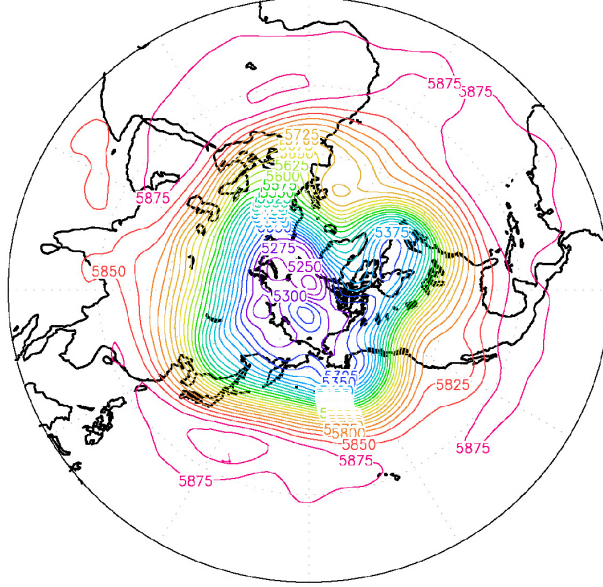
Řešeními této PDR jsou funkce

$$\psi = \psi_{k,l} = e^{i(kx - ly - \omega t)}, \quad (1.3)$$

kde

$$\omega = \omega_{k,l} = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}. \quad (1.4)$$

Těmito řešeními $\psi_{k,l}$ jsou *Rossbyho vlny*. $\omega_{k,l}$ jsou jim příslušící úhlové frekvence. Důležitým faktem je, že $\Re(\psi_{k,l})$ a $\Im(\psi_{k,l})$ jsou taky řešením. Vektor vlnových čísel $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ se nazývá *vlnový vektor* a popisuje danou Rossbyho vlnu. V našem kontextu chápeme vlnové číslo jako počet period vlny na celé délce vlny. Vlnové číslo k se nazývá *zonální* a udává počet period ve východo-západním směru, l je *meridiální* vlnové číslo a kvantifikuje propagaci vlny v severo-j jižním směru.



Obrázek 1.1: Rossbyho vlny s vlnovým číslem $k = 4$ na severní polokouli Země.¹

1.2. Resonanční triády

Jak už bylo zmíněno, speciální význam při zkoumání vlivu Rossbyho vln na globální klima má jejich resonance. Konkrétně uvažujeme trojici sousedících Rossbyho vln, ze kterých „vrchní“ a „spodní“ směřují jedním směrem (například na východ), prostřední vlna má směr opačný a tyto tři vlny spolu resonují. Resonance znamená, že vlnovým součtem vzniká vlna s amplitudou rovnou součtu amplitud původních vln. Takovou trojici nazýváme *resonanční triáda*.

Pro matematické odvození takovéto resonující trojice využijeme CHMR (1.2). Obecně neplatí, že lineární kombinace řešení opisujících tři Rossbyho vlny pořád rovnici splňuje, ale za určitých podmínek platí, že reálná část takovéto lineární kombinace řešením rovnice je. Přesněji, že

$$\Re(\alpha_1(\tau)\psi_{k_1,l_1} + \alpha_2(\tau)\psi_{k_2,l_2} + \alpha_3(\tau)\psi_{k_3,l_3}) \quad (1.5)$$

pro „pomalé“ τ je řešením.

Definice 1.3 (Resonanční triáda). Trojici vln (k_1, l_1) , (k_2, l_2) a (k_3, l_3) z výrazu (1.5), pro které platí podmínky

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad (1.6)$$

$$l_1 + l_2 = l_3, \quad (1.7)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (1.8)$$

¹Zdroj obrázku: commons.wikimedia.org.

nazýváme *resonanční triáda*.

Důkaz platnosti těchto rovností neuvádíme. Pro podrobnosti viz [4].

Dostáváme tedy $(k_2, l_2) = (k_3 - k_1, l_3 - l_1)$. Po doplnění do podmínky (1.8) pro úhlové rychlosti dostáváme

$$\omega(k_1, l_1) - \omega(k_3, l_3) = \omega(k_3 - k_1, l_3 - l_1), \quad (1.9)$$

neboli

$$\frac{k_1}{k_1^2 + l_1^2} - \frac{k_3}{k_3^2 + l_3^2} = \frac{k_1 - k_3}{(k_1 - k_3)^2 + (l_1 - l_3)^2}. \quad (1.10)$$

Pro další účely si přeznačíme proměnné vystupující v rovnici (1.10). Substituujeme $(k_1, l_1) = (n_1, n_2)$ a $(k_3, l_3) = (x_1, x_2)$. Takže, konečné znění rovnice našeho zájmu tak, jak s ní budeme pracovat v dalším textu, je

$$\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}, \quad n_1, n_2, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \quad (1.11)$$

Rovnice (1.11) se nazývá *diofantická*, což znamená, že její řešení jsou pouze celočíselná.¹ Účelem této bakalářské práce je hledat řešení této diofantické rovnice a následně tato řešení smysluplně vizualizovat s cílem provádět analýzu. Ukáže se, že řešení této rovnice vytváří v rovině šestiúhelníkovou strukturu.

1.3. Aplikace v dalších odvětvích

Zajímavostí je, že meteorologie není jediná věda, v níž nalézáme vlny obdobné Rossbyho vlnám. Od jejich objevu ve třicátých letech 20. století se prokázalo, že vlny, jejichž fyzikální podstata je velice podobná Rossbyho vlnám se vyskytují také v oceanologii, ve fyzice plazmatu a dokonce i v astrofyzice.

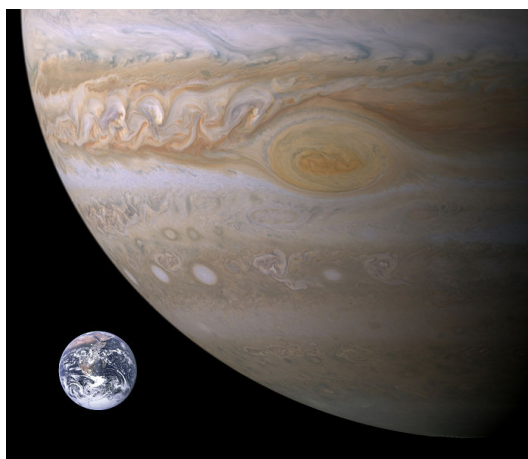
Carl-Gustaf Rossby jako meteorolog věnoval výraznou pozornost také oceánům, protože je známým faktem, že oceány jsou jedním z klíčových faktorů ovlivňujících spolumytváření klimatu na Zemi. Spolu s objevem dlouhých vln v zemské atmosféře postuloval Rossby také existenci podobných vln v oceánech. Tyto vlny vznikají v proudění vody mezi vrchními teplejšími vrstvami oceánů a spodními studenými vodami. Existence těchto oceánských Rossbyho vln byla definitivně potvrzena s příchodem satelitní technologie do oboru oceanologie. Tyto vlny mají amplitudu řádově v centimetrech, ale vlnovou délku řádů stovek kilometrů.

Druhá významná obdoba Rossbyho vln byla objevena ve fyzice plazmatu. Ukázalo se, že driftové proudění zmagnetizovaného plazmatu je matematicky ekvivalentní proudění Rossbyho vln v β -rovině. K takovému proudění dochází například ve fúzném reaktoru, tzv. *tokamaku*. Proto CHMR (1.2) nese název nejen po již zmíněném J.G. Charneym, který ji jako první odvodil pro atmosférické proudění, ale i po japonských fyzicích Akirovi Hasegawovi a Kunioki Mimovi, kteří stejnou rovnici odvodili o třicet let později pro proudění plazmy.

¹Diofantické rovnice se již staletí těší velikému zájmu mezi matematiky. Hrají centrální roli v řadě zajímavých, častokrát jednoduše definovaných, ale velice těžce řešitelných problémů. Nejznámějším příkladem je určitě takzvaná Velká Fermatova věta (*Neeexistují celá kladná čísla x, y, z a $n > 2$, pro která platí $x^n + y^n = z^n$*), kterou v roce 1637 postuloval Pierre de Fermat a jejíž platnost dokázal až v roce 1995 britský matematik Andrew Wiles.

Obdobu Rossbyho vln nacházíme také v astrofyzice. Konkrétně, v tzv. *akrečním disku*, což je rozptýlený prachový materiál, který vlivem gravitace obíhá kolem masivního tělesa (typicky hvězdy nebo černé díry), také dochází k proudění na bázi Rossbyho vln. Toto proudění způsobuje vznik vírů v rotujícím materiálu, který se díky tomu seskupí do ucelenějších struktur. Má se za to, že tento proces je jedním z faktorů, které napomáhají vzniku protoplanet (a později planet) z materiálu rotujícího kolem mladých hvězd.

Atmosférické Rossbyho vlny se samozřejmě nevyskytují pouze na Zemi. Nejpatrnější příklad tohoto proudění na jiných planetách nacházíme na planetě Jupiter. Na něm můžeme již téměř 200 let pozorovat takzvanou Velkou rudou skvrnu, vysokotlaký vír, který vznikl mezi dvěma protichodnými vlnami atmosférického proudění, jejíž průměr je přibližně rovný průměru Země.



Obrázek 1.2: Velká rudá skvrna v atmosféře planety Jupiter v porovnání s velikostí Země.¹

¹Zdroj obrázku: commons.wikimedia.org.

2. Algebraický náhled

V této kapitole se podíváme na rovnici (1.11) a její řešení z algebraického hlediska. Nejprve zadefinujeme množinu všech řešení, pro kterou uvedeme několik základních pozorování. Následně ukážeme, že se tato řešení shlukují do jistých struktur a tyto struktury také blíže popíšeme.

2.1. Množina všech řešení

Definice 2.1 (Množina všech řešení Λ). Množina všech vlnových vektorů, které jsou součástí nějakého řešení rovnice (1.11) je

$$\Lambda = \{n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z}; \\ \text{pro které existuje } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z}, x_1 \neq n_1, \\ \text{splňující rovnost } \frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}\}.$$

Poznámka. Všimněme si, že rovnost (1.11) je symetrická. To znamená, že když čtveřice $(n_1, n_2, x_1, x_2) = (a, b, c, d)$ je řešením, tak, s ohledem na pořadí, čtveřice (c, d, a, b) je také řešením.

Uvedme nyní několik tvrzení, které platí pro množinu všech řešení Λ a které nám pomůžou tuto množinu přesněji popsat.

Tvrzení 2.2. Necht $n = (n_1, n_2) \in \Lambda$ a $x = (x_1, x_2)$ je nějaký vektor, se kterým n splňuje rovnost $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$. Potom také $n - x = (n_1 - x_1, n_2 - x_2) \in \Lambda$.

Důkaz. Toto pozorování je zřejmé. □

Tvrzení 2.3 (Neexistence interakce tří vln na ose n_1). Pokud $n_1, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ a $n_2 = 0$, pak platí rovnost

$$\frac{n_1}{n_1^2} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + x_2^2}. \quad (2.1)$$

Potom platí, že

$$n_1 x_1 (n_1 - x_1) = 0, \quad (2.2)$$

což znamená, že $n, x \notin \Lambda$, protože je porušena jedna z podmínek $n_1 \neq 0, x_1 \neq 0, n_1 \neq x_1$.

Důkaz. Důkaz viz [2]. □

Poznámka. Díky platnosti tohoto tvrzení tedy můžeme v Definici 2.1 psát $(n_1, n_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}$.

Tvrzení 2.4. Pro každé $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $b \geq \frac{3}{4}a, b \neq a$ a každé $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ je dvojice

$$(p^{4b-3a}q^a, p^bq^{3b-2a})$$

prvkem Λ .

Důkaz. Pro $n = (p^{4b-3a}q^a, p^bq^{3b-2a})$ vezmeme $x = (p^a q^{4b-3a}, -p^{3b-2a}q^b)$. Pak zřejmě $x_1 \neq n_1$. Platnost rovnosti $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$ lze ověřit přímým výpočtem. □

Poznámka. Velice podstatným důsledkem platnosti tohoto tvrzení je, že Λ je nekonečná množina. Skutečně, například pro $a = 0, b = 1$ můžeme vygenerovat nekonečnou množinu $\{(p^4, pq^3), p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$, která je podmnožinou Λ .

Tvrzení 2.5. Pro každé $n_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ existuje $n = (n_1, n_2) \in \Lambda$.

Důkaz. Pro důkaz tohoto tvrzení využijeme tvar prvků použitých v Tvrzení 2.4. Když položíme $a = 1$ a $b = 2$, dostáváme $n_1 = p^5 q$. Pro $p = 1$ může n_1 nabrat libovolné hodnoty $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. \square

Tvrzení 2.6. Jestli $n = (n_1, n_2) \in \Lambda$, potom také $-n = (-n_1, -n_2)$, $\bar{n} = (n_1, -n_2)$ a $-\bar{n} = (-n_1, n_2)$ jsou prvky Λ .

Důkaz. Necht $x = (x_1, x_2)$ je element splňující rovnost $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$ pro nějaké n . Snadno dopočítáme, že $-x = (-x_1, -x_2)$, $\bar{x} = (x_1, -x_2)$ a $-\bar{x} = (-x_1, x_2)$ jsou prvky, které po řadě splňují rovnost pro $-n$, \bar{n} a $-\bar{n}$. \square

Tvrzení 2.7 (Násobnost řešení). Necht $n = (n_1, n_2)$ a $x = (x_1, x_2)$ jsou prvky Λ , které splňují rovnost $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$. Potom také $\alpha n = (\alpha n_1, \alpha n_2)$ a $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ pro $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ splňují tuto rovnost.

Důkaz. Důkaz plyne z jednoduché úpravy rovnosti

$$\frac{\alpha n_1}{\alpha^2 n_1^2 + \alpha^2 n_2^2} - \frac{\alpha x_1}{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2} = \frac{\alpha(n_1 - x_1)}{\alpha^2(n_1 - x_1)^2 + \alpha^2(n_2 - x_2)^2}$$

vynásobením obou stran rovnice číslem α na

$$\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}.$$

\square

Tvrzení 2.8. Polopřímky vycházející z počátku souřadnicové soustavy do bodů n , x a $n - x$ mají různé směrnice. Neboli, pro $n = (n_1, n_2) \in \Lambda$ a $x = (x_1, x_2)$ splňující rovnost $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$ neexistuje takové $\alpha \in \mathbb{Q}$, pro které platí $x = \alpha n = (\alpha n_1, \alpha n_2)$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje α takové, že platí

$$\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{\alpha n_1}{\alpha^2 n_1^2 + \alpha^2 n_2^2} = \frac{n_1 - \alpha n_1}{(n_1 - \alpha n_1)^2 + (n_2 - \alpha n_2)^2}.$$

Po zjednodušení dostáváme

$$\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{n_1}{\alpha(n_1^2 + n_2^2)} = \frac{n_1}{(1 - \alpha)(n_1^2 + n_2^2)}$$

a po vynásobení $\alpha(1 - \alpha)$

$$\frac{\alpha(1 - \alpha)n_1 - (1 - \alpha)n_1}{n_1^2 + n_2^2} = \frac{\alpha n_1}{n_1^2 + n_2^2},$$

z čehož plyne

$$\alpha(1 - \alpha) - (1 - \alpha) = \alpha,$$

což je kvadratická rovnice bez reálných kořenů. \square

Platnost posledního tvrzení nás motivuje k následující geometrické interpretaci řešení.

2.2. Shluky řešení

Prvky množiny Λ jsou ve skutečnosti vrcholy neorientovaného grafu, jehož hrany jsou určeny symetrickou relací „pro n existuje x “. Graf budeme označovat stejným, ale tučným písmenem Λ . Pojďme vyšetřit jakou má Λ strukturu.

Tvrzení 2.9. Každý vrchol v Λ je součástí jednoduchého cyklu složeného ze šesti vrcholů $(n, x, -n + x, -n, -x, n - x)$.

Důkaz. Musíme ukázat, že uvažovaný graf je opravdu jednoduchý cyklus. To znamená, že musíme ukázat, že žádné dva vrcholy nejsou identické. Pokud projdeme každou dvojici, zjistíme, že vždy dojdeme k jedné z nepovolených podmínek $n_1 = 0$, $x_1 = 0$ nebo $n_1 = x_1$. Například předpokládejme, že $n = -n + x$, neboli $x = 2n$. Rovnost

$$\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$$

se upraví na

$$\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{2n_1}{4n_1^2 + 4n_2^2} = \frac{-n_1}{n_1^2 + n_2^2},$$

z čehož plyne $n_1 = 0$. □

Situace je ale zajímavější, protože může nastat, že dva nebo více šestiúhelníků v Λ mají společné vrcholy, čímž spolu vytvářejí spojitou komponentu. Zavedme tedy následující pojem.

Definice 2.10 (Shluk řešení Ω). Necht Ω je neprázdný podgraf grafu Λ a $\omega_i \in \Omega, i \in I$ jsou všechny jeho vrcholy. Ω nazveme *shlukem řešení* (anglicky *cluster*), pokud mezi každými dvěma vrcholy $\omega_k, \omega_l \in \Omega$ existuje cesta v podgrafu Ω (neboli, že Ω je spojitý graf).

Ukažme si hned dva příklady takovýchto shluků řešení. Prvním z nich je graf určen vrcholem $n = (1, 11)$ se 6 vrcholy (Obrázek 2.1), druhým je graf určený vrcholem $n = (3, 19)$ (Obrázek 2.2). Vidíme, že druhý graf se skládá ze dvou šestiúhelníků, které mají společné vrcholy $x = (35, -25)$ a $-x = (-35, 25)$.

Tvrzení 2.11. Existují nekonečné Ω .

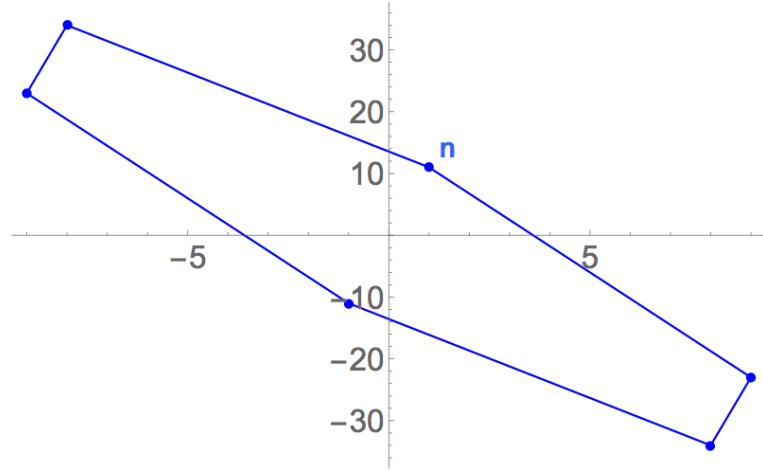
Důkaz. Důkaz provedeme uvedením příkladu takového shluku.

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \{ & (-1, 8), (-16, -2), (-15, -10), (1, -8), (16, 2), \\ & (15, 10), (-13, -13), (3, -11), (13, 13), (-3, 11), \\ & (27, -21), (-5, -25), (-8, -14), (5, 25), (-27, 21), \\ & (8, 14), (-32, -4), \dots \} \end{aligned}$$

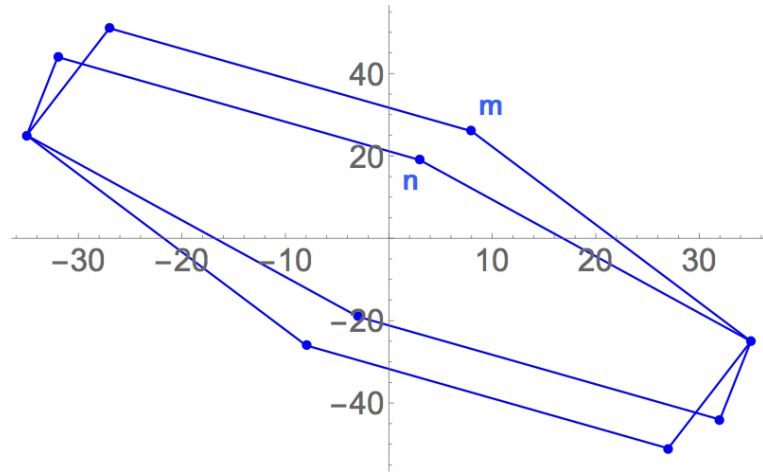
je shluk řešení a jeho některé prvky. Vidíme, že $(-32, -4) = 2 \cdot (-16, -2)$, což s využitím Tvrzení 2.7 znamená, že Ω_1 obsahuje také násobky sousedících prvků $(-16, -2)$, násobky jejich sousedících prvků, a tak dále. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{ & (i, -8i), (16i, 2i), (15i, 10i), (-13i, -13i), \\ & (3i, -11i), (27i, -21i), (-5i, -25i), (-8i, -14i) \}. \end{aligned}$$

□



Obrázek 2.1: Shluk řešení v Λ tvořen vrcholy (po směru hodinových ručiček) $n = (1, 11)$, $x = (9, -23)$, $-n + x = (8, -34)$, $-n = (-1, -11)$, $-x = (-9, 23)$, $n - x = (-8, 34)$.



Obrázek 2.2: Shluk řešení v Λ tvořen vrcholy $n = (3, 19)$, $x = (35, -25)$, $-n + x = (32, -44)$, $-n = (-3, -19)$, $-x = (-35, 25)$, $n - x = (-32, 44)$ a $m = (8, 26)$, $-m + x = (27, -51)$, $-m = (-8, -26)$, $m - x = (-27, 51)$.

Příklad 2.12. Uvedme pár příkladů konečných shluků Ω .

- (i) $\Omega_1 = \{(1, 11), (-8, 34), (-9, 23), (-1, -11), (8, -34), (9, -23)\}$
- (ii) $\Omega_2 = \{(8, 26), (-27, 51), (-35, 25), (-8, -26), (27, -51), (35, -25), (-3, -19), (32, -44), (3, 19), (-32, 44)\}$
- (iii) $\Omega_3 = \{(11, 28), (-16, 58), (-27, 30), (-11, -28), (16, -58), (27, -30)\}$
- (iv) $\Omega_4 = \{(101, 404), (-256, 268), (-357, -136), (-101, -404), (256, -268), (357, 136)\}$

Definice 2.13 (Primitivní šestiúhelník). Uvažme dva vrcholy šestiúhelníku $n = (n_1, n_2)$ a $x = (x_1, x_2)$. Jednoduše nahlédneme, že pokud nejmenší společný dělitel souřadnic vrcholů

$$nsd(n_1, n_2, x_1, x_2) = 1,$$

pak i všechny ostatní dvojice vrcholů mají v tomto smyslu nesoudělné souřadnice. Šestiúhelník splňující tuto podmínku budeme nazývat *primitivní*.

Přiřadme každému šestiúhelníku čtveřici (q_1, q_2, q_3, q_4) , která postupně vyjadřuje počet vrcholů v prvním, druhém, třetím a čtvrtém kvadrantu. Kvůli symetrii platí $q_1 = q_3$ a $q_2 = q_4$. Příпустné jsou tedy tyto možnosti:

(i) $(0, 3, 0, 3)$

(ii) $(1, 2, 1, 2)$

(iii) $(2, 1, 2, 1)$

(iv) $(3, 0, 3, 0)$

Tvrzení 2.14. Šestiúhelníky s příslušnými čtveřicemi $(0, 3, 0, 3)$ a $(3, 0, 3, 0)$ nejsou možné.

Důkaz. Uvažme čtveřici $(3, 0, 3, 0)$.

Mějme $n_1 > 0, n_2 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0, n_1 - x_1 > 0, n_2 - x_2 > 0$. Předpokládejme dále, že

$$\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{n_1}{n_2}.$$

Lehko odvodíme, že z toho plyne

$$\frac{n_1 - x_1}{n_2 - x_2} \geq \frac{n_1}{n_2}.$$

Uvažme nyní rovnost

$$\frac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2}{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 + 1}.$$

Pravá strana této rovnosti je kladná rostoucí funkce pro $\frac{u_1}{u_2}$, například $\psi\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$. Potom z

$$\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{n_1}{n_2} \leq \frac{n_1 - x_1}{n_2 - x_2}$$

plyne

$$\psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \leq \psi\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \leq \psi\left(\frac{n_1 - x_1}{n_2 - x_2}\right),$$

ale požadujeme také

$$\psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \psi\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \psi\left(\frac{n_1 - x_1}{n_2 - x_2}\right),$$

což je spor. Obdobnou úvahu provedeme pro $\frac{x_1}{x_2} \geq \frac{n_1}{n_2}$. Důkaz pro $(0, 3, 0, 3)$ vyplývá ze symetrie. \square

3. Algoritmus hledání shluků řešení

Nyní si představíme algoritmus, který jsme použili při hledání řešení rovnice (1.11). K implementaci jsme využili prostředí Wolfram Mathematica. V této kapitole se ale omezíme na vysvětlení základních principů algoritmu jenom v jazyce obecného pseudokódu. Opis algoritmu rozdělíme na dvě podčásti. V první části budeme řešit problém hledání všech sousedů pro daný vrchol a v části druhé ukážeme algoritmus pro nalezení shluku řešení Ω , do kterého daný vrchol patří.

3.1. Hledání sousedů

V této části si ukážeme algoritmus pro základní problém, a to nalezení sousedících vrcholů pro zadaný vrchol. Nejprve si přesně zadefinujeme náš problém. Úloha, kterou naším algoritmem chceme vyřešit je:

$$„Pro dané $n = (n_1, n_2)$ najdi všechna $x = (x_1, x_2)$, pro které platí rovnost $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$.”$$

Obecně může být takovýchto x víc než 2. Jak jsme ukázali v kapitole 2, daný vrchol n může být součástí několika šestiúhelníků a v každém šestiúhelníku má n dva sousedy.

Důležité je, abychom opravdu našli *všechna* řešení. Zřejmě jsme nuceni pro nalezení všech řešení mít algoritmus, který bude prohledávat velký prostor možností. Tento prostor, který je samozřejmě obecně nekonečný, tedy musíme nějakým způsobem omezit, abychom si byli jisti, že všechna řešení opravdu najdeme. K tomu nám pomůže následující pozorování, které čerpáme z [2].

Tvrzení 3.1. Pro fixní $n = (n_1, n_2)$ platí pro všechna $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ nerovnost

$$\begin{aligned} \frac{|n_1|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} &\leq \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}} \\ &\leq \frac{2}{\min\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \sqrt{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}\}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Důkaz. Tvrzení se skládá ze dvou nerovností.

Dokažme nyní platnost první nerovnosti. Ukažme nejprve, že platí nerovnost

$$\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}. \quad (3.2)$$

Vynásobením oběma jmenovateli dostáváme

$$x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_1^2 + x_2^2$$

a po umocnění na druhou

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_1^2 x_2^2 &\leq x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \\ 0 &\leq x_1^2 x_2^2 + x_2^4. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, takže platí i nerovnost (3.2). Obdobně se ukáže, že platí také

$$\frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}}. \quad (3.3)$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \frac{|n_1|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} &\leq \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}}. \end{aligned}$$

Důkaz druhé nerovnosti je velice jednoduchý. Lehce nahlédneme, že pro jakákoliv $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \leq b$ platí $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{a}$. Jednoduchou úpravou dostáváme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \frac{a}{b} = \frac{1 + \frac{a}{b}}{a} \leq \frac{2}{a},$$

kde zlomek $\frac{a}{b}$ je menší nebo rovno než 1, takže poslední znaménko nerovnosti platí. Tím je Tvzení 3.1 zcela dokázáno. \square

S využitím podmínky (3.1) tedy můžeme prohledávat prostor řešení pomocí následujícího algoritmu.

Algoritmus 3.2.

```
function FIND_NEIGHBOURS( $n_1, n_2$ )
   $neighbours \leftarrow \emptyset$ 
  for  $x_1$  in  $\{-1, 1\}$  do
    for  $x_2$  in  $\{-1, 1\}$  do
      while  $\frac{|n_1|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \leq \frac{2}{\min\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \sqrt{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}\}}$  do
        while  $\frac{|n_1|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \leq \frac{2}{\min\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \sqrt{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}\}}$  do
          if  $\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n_1 - x_1}{(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2}$  then
             $neighbours \leftarrow neighbours \cup \{(x_1, x_2)\}$ 
           $x_2 \leftarrow x_2 + \text{SIGNUM}(x_2)$ 
           $x_2 = 0$ 
           $x_1 \leftarrow x_1 + \text{SIGNUM}(x_1)$ 
  return  $neighbours$ 
```

Poznámka. Všimněme si, že algoritmus musí kvůli nesymetrickosti podmínky (3.1) běžet postupně pro každý kvadrant z hlediska hodnot x_1 a x_2 (první dva *for* cykly). Nejprve běží pro záporné x_1 i x_2 , pak pro záporné x_1 a kladné x_2 a tak dále.

Poznámka. Ve vlastní implementaci používáme zrychlení v podobě „skoků“ mezi kontrolováním platnosti podmínky 3.1 (podmínka se nekontroluje pokaždé, ale například každých 100 cyklů).

3.2. Nalezení shluku řešení

Po uvedení algoritmu pro hledání sousedů pro daný vrchol si teď ukážeme algoritmus, který pro zadaný vrchol nalezne příslušný shluk řešení Ω . Přesněji, nalezne počet prvků Ω nejvýše rovný dopředu zadané konstantě, která však může být jakkoliv veliká. Takže, pro nekonečné nebo příliš velké shluky najdeme jenom jejich část.

Uvádíme zjednodušenou verzi algoritmu. Ve skutečnosti algoritmus, který byl implementován, je schopen hledat shluky řešení pro několik startovacích hodnot $n = (n_1, n_2)$ a provádět i případné sjednocování shluků.

Algoritmus 3.3.

```

function FIND_CLUSTER( $n_1, n_2$ )
     $vertices \leftarrow \emptyset$ 
     $edges \leftarrow \emptyset$ 
     $neighbourhood \leftarrow \emptyset$   $\triangleright$  Datová struktura na uchovávání sousedů pro vícero vrcholů
     $k \leftarrow 1$ 
     $(m_1, m_2) \leftarrow (n_1, n_2)$ 
    repeat
         $\triangleright$  Pokud neznáme sousedy, zjistíme je. Jinak je načteme.
        if  $neighbourhood[(m_1, m_2)] = \emptyset$  then
             $newNeighbours \leftarrow \text{FIND\_NEIGHBOURS}(m_1, m_2)$ 
             $neighbourhood[(m_1, m_2)] \leftarrow newNeighbours$ 
        else
             $newNeighbours \leftarrow neighbourhood[(m_1, m_2)]$ 
         $\triangleright$  Ukládání sousedů pro vrcholy lišící se jenom ve znaménkách
        for  $(i, j)$  in  $\{(-m_1, -m_2), (-m_1, m_2), (m_1, -m_2)\}$  do
             $neighbourhood[(i, j)] \leftarrow \{(\text{SIGNUM}(i)*k, \text{SIGNUM}(j)*l); (k, l) \in newNeighbours\}$ 
         $\triangleright$  Uložení vrcholů a hran šestiúhelníku
        for  $(x_1, x_2)$  in  $newNeighbours$  do
             $vertices \leftarrow vertices \cup \{(m_1, m_2), (x_1, x_2), (-m_1 + x_1, -m_2 + x_2),$ 
                 $(-m_1, -m_2), (-x_1, -x_2), (m_1 - x_1, m_2 - x_2)\}$ 
             $edges \leftarrow edges \cup \{(m_1, m_2, x_1, x_2), (x_1, x_2, -m_1 + x_1, -m_2 + x_2),$ 
                 $(-m_1 + x_1, -m_2 + x_2, -m_1, -m_2), (-m_1, -m_2, -x_1, -x_2),$ 
                 $(-x_1, -x_2, m_1 - x_1, m_2 - x_2), (m_1 - x_1, m_2 - x_2, m_1, m_2)\}$ 
         $k \leftarrow k + 1$ 
        if  $\text{LENGTH}(vertices) \geq k$  then
             $(m_1, m_2) \leftarrow vertices[k]$   $\triangleright$  Postupně procházíme všechny nalezené vrcholy
    until  $\text{LENGTH}(vertices) < k$  OR  $k > \text{MAX\_VERTICES}$ 
    return  $vertices, edges$ 

```

Možným vylepšením algoritmu v případě, že bychom chtěli hledat řešení pro n v nějakém rozsahu, by bylo využití Tvzení 2.7 o násobnosti řešení. Pro každé nalezené sousedy daného vrcholu bychom hned mohli určit také sousedy násobků tohoto vrcholu.

4. Implementace ve Wolfram Mathematica

Součástí této bakalářské práce je také praktická implementace algoritmů uvedených v kapitole 3. K této implementaci bylo využito prostředí Wolfram Mathematica a zde si uvedeme přehled naprogramovaných funkcí a použitých datových struktur.

4.1. Programový balík Rossby.m

Rossby.m je programový balík, který je míněn jako ucelený soubor obsahující veškerou funkcionalitu. Pokud uživatel chce používat námi naprogramované funkce, importuje si tento balík do svého pracovního sešitu ve Wolfram Mathematica. Uvedme funkce, které balík obsahuje spolu s jejich popisem.

Initialize[] je funkce, která musí být spuštěna jako první pro korektní zahájení práce s balíkem.

IsSolution $[n_1, n_2, x_1, x_2]$ je základní funkcí, která vrátí *True* pokud (n_1, n_2) a (x_1, x_2) vyhovují rovnici $\frac{n_1}{n_1^2+n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} = \frac{n_1-x_1}{(n_1-x_1)^2+(n_2-x_2)^2}$ a *False* pokud nikoliv.

FindNeighbours $[n_1, n_2]$ najde pro zadaný vrchol (n_1, n_2) všechna (x_1, x_2) , se kterými splňují rovnici $\frac{n_1}{n_1^2+n_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} = \frac{n_1-x_1}{(n_1-x_1)^2+(n_2-x_2)^2}$.

FindSolutions $[n_1, n_2]$ najde shluk řešení, jehož součástí je vrchol (n_1, n_2) a tento shluk vykreslí v souřadné rovině.

FindSolutions $[\{\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \dots\}]$ najde všechny shluky řešení, do nichž patří vrcholy $(a_1, a_2), (b_1, b_2), \dots$ a tyto shluky vykreslí v souřadné rovině.

FindSolutionsForRange $[n_{1,min}, n_{1,max}, n_{2,min}, n_{2,max}]$ najde všechny shluky řešení pro vrcholy z $\{(n_1, n_2); n_{1,min} \leq n_1 \leq n_{1,max}, n_{2,min} \leq n_2 \leq n_{2,max}\}$.

FindSolutionsForRange $[a, b]$ je definována jako *FindSolutionsForRange* $[-a, a, -b, b]$

ExportData $[filename]$ uloží dosud nalezené vrcholy a hrany grafu Λ do souboru s názvem *filename*.

ImportData $[filename]$ načte do pracovní paměti vrcholy a hrany uložené v souboru s názvem *filename*.

Reset[] vymaže doposud nalezené vrcholy a hrany.

K dispozici jsou i dva nastavitelné parametry, které ovlivňují chování programu.

MAXVERTS udává maximální počet vrcholů, který bude prohledán (pro nekonečné nebo velké shluky řešení). Předvolená hodnota je 10.

USETIMING udává, jestli bude měřen čas výpočtu funkcí *FindSolutions*. Předvolená hodnota je *True*.

Programový balík si dává za cíl být nápomocný při zkoumání struktury shluků řešení. Dobrou vlastností implementace je, že po nalezení sousedů nebo celých shluků pro daný vrchol jsou tato data ukládána v pracovním sešitu a tedy při opakovaném volání pro stejné vstupy už nedochází k opětovnému výpočtu.

4.2. Pracovní sešit *Rossby.nb*

V souboru *Rossby.nb* je k nalezení originální implementace veškerých funkcí, i těch, které nejsou „veřejně“ dostupné v balíku *Rossby.m*. Zde uvedeme dvě důležité funkce z tohoto souboru, které nebyli již popsány v předešlé sekci.

Search $[n_1, n_2]$ najde shluk řešení, jehož součástí je vrchol (n_1, n_2) . V této funkci je volána funkce *FindNeighbours* a také se provádí případné sjednocování shluků a jejich úprava pro další zpracování.

Visualize $[]$ vykreslí nalezené shluky řešení uživateli.

Uvedme ještě stručný popis některých datových struktur, které jsou k nalezení v pracovním sešitě.

vertices je seznam vrcholů grafů nalezených shluků řešení. Jedná se vlastně o „seznam seznamů“, kde například (v sintaxi jazyka Mathematica) *vertices[[2]]* udává seznam vrcholů shluku řešení s pořadovým označením 2.

edges je seznam hran grafů nalezených shluků řešení (struktura je obdobná jako u *vertices*).

associations je datová struktura asociací mezi vrcholem a označením shluku, do kterého vrchol patří.

neighbours je datová struktura asociací mezi vrcholem a seznamem sousedů, které vrchol má.

Závěr

Cíle této bakalářské práce byly tři — popsat problematiku, vytvořit originální programový balík v prostředí Wolfram Mathematica a provést experimentální výpočty a vyvodit z nich závěry. Můžeme zkonstatovat, že dva z těchto cílů byly naplněny zcela a jeden cíl byl naplněn částečně.

První cíl — popsat a vymezit problém, byl splněn rešerší v kapitolách 1 a 2. Druhý cíl — vytvoření funkčního programu, který bude hledat řešení a shluky řešení rovnice (1.11) a následně je vykreslovat, byl také splněn. Úspěchem je, že se algoritmus podařilo značně urychlit oproti jeho původním variantám. Pro méně náročné vstupy program dodá výstupy řádově v sekundách, pro náročnější vstupy v minutách až desítkách minut (naproti původním minutám, respektive hodinám).

Poslední cíl, a to využití naprogramovaných algoritmů k provádění hlubší analýzy výsledků a vyvozování experimentálních závěrů nebyl zcela splněn, což autor této práce přiznává. Důvodem byla koncentrace úsilí do zrychlení samotného algoritmu, což neponechalo autorovi dostatek času provádět rozsáhlejší experimenty.

Literatura

- [1] BUSTAMANTE, M. D. and HUYAT U.: Complete classification of discrete resonant Rossby/drift wave triads on periodic domains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, September 2013, vol. 18, no. 9, p. 2402—2419.
- [2] KISHIMOTO, N. and YONEDA, T.: A number theoretical observation of a resonant interaction of Rossby waves. *Kodai Mathematical Journal*, 2017, vol. 40, no. 1, p. 16-20.
- [3] KOPP, G.S.: The Arithmetic Geometry of Resonant Rossby Wave Triads. *SIAM Journal of Applied Algebra and Geometry*, May 2017, vol. 1, no. 1, p. 352—373.
- [4] LYNCH, P.: Resonant Rossby wave triads and the swinging spring. *Bulletin of American Meteorological Society*, May 2003, vol. 84, no. 1, p. 605—616.
- [5] YAMADA, M. and YONEDA, T.: Resonant interaction of Rossby waves in two-dimensional flow on a β -plane. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, February 2013, vol. 245, no. 1. p. 1—7
- [6] KUREŠ, M.: Number theoretical views on resonant Rossby wave triads: graphs with vertices on quartics. *Manuscript*.

Seznam použitých zkratek a symbolů

f	Coriolisův parametr
Ω	úhlová rychlost rotace Země
β -rovina	aproximační model, v němž existují Rossbyho vlny
PDR	parciální diferenciální rovnice
CHMR	Charneyho-Hasegawova-Mimova rovnice
ψ	proudová funkce
Λ	množina všech řešení rovnice (1.11)
$\mathbf{\Lambda}$	graf všech řešení rovnice (1.11)
Ω	shluk řešení rovnice (1.11)

Seznam příloh

Soubory na přiloženém CD: programový balík *Rossby.m* a pracovní sešit s okomentovaným zdrojovým kódem *Rossby.nb*.